جامعة ديالى

كلية الادارة والاقتصاد

بحوث العمليات

محاضرات

٢٠١٥-٢٠١٦

بحوث العمليات

تعريف بحوث العمليات Operation Research (OR)

هو فرع من فروع علم الرياضيات التطبيقية يهتم باستخدام أساليب التحليل الكمي لمساعدة الإدارة في اتخاذ القرارات حول المشاكل التي تواجهها مع الاعتماد بالدرجة الأولى على الرياضيات المتقدمة.

يعد الاستخدام المباشر للأرقام والعلاقات الرياضية والاساليب والادوات الكمية حلقة الوصل في هذا المدخل التي تأتي ضمن ما يسمى ببحوث العمليات وذلك لتفسير كثير من مشكلات أدارة الاعمال يعتمد المدخل الكمي الارقام والعلاقات الرياضية (المعادلات والمتباينات)والنماذج الرياضية أساسا لتوضيح المشكلة في حين تعتمد المداخل الاخرى لدراسة أدارة الاعمال على الادارة والوصف والتحليل استنادا الى أساليب البحث والاستبيان.

وتتضح اهمية بحوث العمليات مدخلا كميا لدراسة المشاكل الادارية في الواقع العملي لمنظمة الأعمال *تسهم بحوث العمليات في تقريب المشكلة الادارية الى الواقع بموجب صيغ علمية مبسطة ونماذج رياضية معينة تظهر مكونات المشكلة ضمن أطر من التفكير العلمي المنظم والعقلاني ، كما ان بحوث العمليات تقوم بعرض النماذج في مجموعة علاقات رياضية بالشكل الذي يوضح الفرص المختلفة (البدائل) لعملية اتخاذ القرار وبما يسهم في تفسير عناصر المشكلة والعوامل المؤثرة فيها ، كذلك تقوم بتعميم المعايير القياسية والمثالية لاتخاذ القرارات .*

خطوات بحوث العمليات :-

١) تعريف المشكلة قيد الدرس .

٢) صياغة الانموذج الملائم للمشكلة .

٣) حل الانموذج .

٤) اختبار الانموذج والحل الناتج منه .

٥) وضع الحل على الواقع (تطبيق الحل) .

البرمجة الخطية

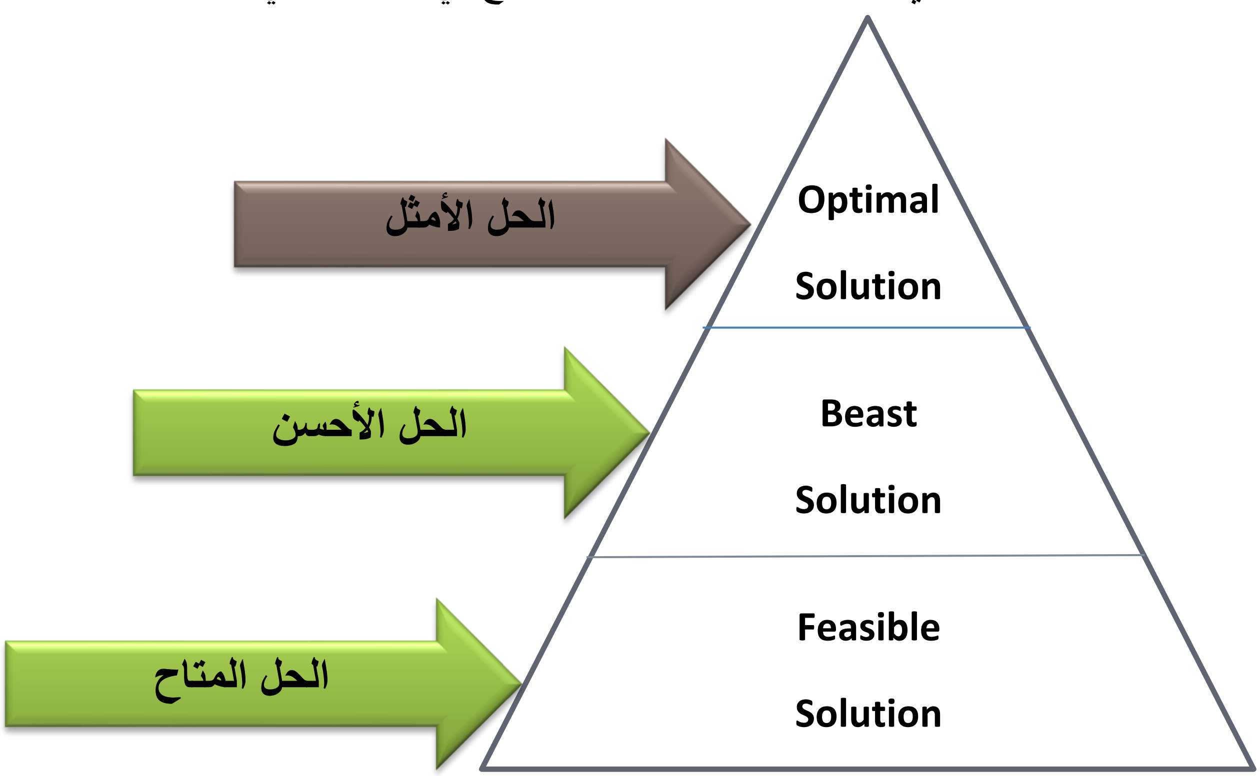
<u>البرمجة الخطية</u>:- هي اسلوب رياضي حديث يستخدم كأداة لإيجاد (أفضل استعمال) للموارد المحددة للمنشأة وكلمة **البرمجة** تعني استعمال الاسلوب لإيجاد البرامج المختلفة لاستعمال الموارد المحددة لدى المنشأة في ظل عدد من القيود. أما **الخطية** فتعني أن العلاقة بين متغيرات المشكلة هي علاقة خطية.

عند حل الانموذج في بحوث العمليات يكون هنالك دائما السعي لإيجاد الحل الامثل لأنه توجد عدة أنواع من الحلول للمشكلة وهي :-

١- الحل المتاح (Feasible Solution) :- هو الحل الذي يمكن الوصول إليه في أي مجموعة من المعادلات .

٢- الحل الأحسن (Beast Solution) :- هو الحل الذي يمكن الحصول عليه بعد إيجاد الحل في الحالة الأولى وهو يحقق كافة القيود .

٣- الحل الأمثل (Optimal Solution):- هو الحل الذي يمكن الوصول إليه بعد إيجاد الحل الأفضل الذي يحقق كافة القيود. وكما موضح في الشكل التالي:-



صيغة البرمجة الخطية

انموذج البرمجة الخطية

$$(max, min)Z = \sum_{j=1}^{n} cjxj$$

الصيغة العامة عبارة عن دالة الهدف والقيود

حيث أن : J=1,2,.....n

s.t:-

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{aj\ xj}\ (\leq \text{ or } \geq \text{ or } =)\ bj$$

$$X_j \geq 0$$

صياغة انموذج البرمجة الخطية وبناءه :-

<u>مثال</u> :- تنتج احدى الشركات نوعين من السلع (B,A) تصنع كل سلعة على شكل

ثلاث مراحل كل مرحلة داخل أحد الأقسام الثلاثة الموجودة في الشركة فاذا كان تصنيع السلعة A يحتاج الى (ساعتين عمل في القسم الاول وساعة عمل في القسم الثاني واربع ساعات عمل في القسم الثالث). ويحتاج تصنيع السلعةB الى (ساعتين عمل في كل قسم).كما ان عدد ساعات العمل المتاحة في القسم الاول هي (١٦٠) ساعة عمل اسبوعا وفي القسم الثاني (١٢٠) ساعة عمل اسبوعيا وفي القسم الثالث (٢٨٠) ساعة عمل اسبوعيا. واذا كان ربح الوحدة الواحدة من السلعة A هو (٢) دولار ومن السلعة الثانيةB هو (٣) دولار.

المطلوب :- أيجاد الانموذج الرياضي الخطي لهذه المشكلة لتحديد حجم الإنتاج الأمثل من السلعتين اذا كان هدف الشركة هو الحصول على اكبر ربح ممكن .

الحل : لتسهيل فهم المشكلة توضع في جدول

السلعة	الوقت اللازم للتصنيع			ربح الوحدة الواحدة دولار
	القسم الأول	القسم الثاني	القسم الثالث	
A	٢	١	٤	٢
B	٢	٢	٢	٣
ساعات العمل المتاحة	١٦٠	١٢٠	٢٨٠	

نفرض أن الكمية المنتجة من السلعة الأولى هي : X_1

نفرض أن الكمية المنتجة من السلعة الثانية هي : X_2

وبذلك تتكون دالة الهدف والقيود للأنموذج الخطي كما يلي :-

$$\text{Max} \quad Z = 2X_1 + 3X_2$$

Subject to constraints :-

$$2X_1 + 2X_2 \leq 160$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 120$$

$$4X_1 + 2X_2 \leq 280$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

مثال :- شركة لتعبئة المشروبات الغازية تمتلك معملين هما (Q , P) كل معمل منها ممكن أن ينتج الأنواع الثلاثة المختلفة من المشروبات الغازية الثلاثة (C , B , A). الطاقة الانتاجية اليومية لكل من هذين المعملين مقدرة بالقنينة وهي كما يلي :-

المعملين / المشروبات	الطاقة الانتاجية للمعمل P قنينة	الطاقة الانتاجية للمعمل Q قنينة
A	3000	1000
B	1000	1000
C	2000	6000

ونتيجة لدراسة حالة السوق لهذه المشروبات خلال شهر نيسان تبين أن الطلب على المشروب A خلال هذا الشهر يساوي (٢٤٠٠ قنينة) والطلب على المشروب B

خلال الشهر نفسه هو (١٦٠٠ قنينة) والطلب على المشروب C هو (٤٨٠٠ قنينة)

فاذا علم أن كلفة تشغيل المعملين (Q , P) هي (٦٠٠ و ٤٠٠) دولار يوميا وعلى التوالي .

المطلوب:- كم يجب أن يكون عدد أيام تشغيل كل من هذين المعملين خلال الشهر لأجل توفير الطلب على المشروبات جميعها و بأقل كلفة ممكنة .

الحل : واجب ، مع أمثلة أخرى :

البرمجة الخطية _ صياغة الانموذج الخطي

حل الواجب للمحاضرة السابقة –

الحل :-

X نفرض ان عدد ايام تشغيل المعمل الاول   P هو X1

نفرض ان عدد ايام تشغيل المعمل الثاني Q هو X2

لذلك يكون الانموذج :-

$$\text{Max} \quad Z = 600\, X_1 + 400\, X_2$$

$$3000\, X_1 + 1000\, X_2 \geq 2400$$

$$1000\, X_1 + 1000\, X_2 \geq 1600$$

$$2000\, X_1 + 6000\, X_2 \geq 4800$$

$$X_1 , X_2 \geq 0 \quad , \quad X_1 , X_2 \leq 30$$

مثال :- تقوم احدى منشآت وزارة التجارة بوضع خطة لاستيراد ثلاثة انواع من السلع لغرض تسويقها في السوق المحلي علما بأن نفقات الشراء والنفقات الاخرى موضحة في الجدول التالي :-

النفقات	المبلغ لكل سلعة السلعة الثانية	السلعة الثانية	السلعة الاولى	المبالغ الكلية المخصصة
نفقات تسويقية	٢	٢	١	مساوية ل ٤٠٠٠٠
نفقات إدارية	٢	١	٢	على الاقل ٣٠٠٠٠
نفقات متنوعة	٤	٢	٢	على الاكثر ١٠٠٠٠
سعر الشراء	٥	٤	٦	

المطلوب:- تحديد الحجم الأمثل للاستيراد والذي يحقق أقل كلفة ممكنة .

الحل :- نفرض أن :

X_1 : يمثل عدد الوحدات من السلعة الاولى .

X_2 : يمثل عدد الوحدات من السلعة الثانية .

X_3 : يمثل عدد الوحدات من السلعة الثالثة .

$$\text{Max} \quad Z = ٥ X_1 + ٤ X_2 + ٦ X_٣$$

s.t

$$٢ X_1 + ٢ X_2 + X_٣ = 2400$$

$$٢ X_1 + X_2 + ٢ X_٣ \geq 1600$$

$$٤ X_1 + ٢ X_2 + ٢ X_٣ \leq 4800$$

$$X_1 \geq 0 \quad , \quad X_2 \geq 0 \; , \quad X_٣ \geq 0$$

بعد ان يتم بناء الانموذج الرياضي يمكن استخدام احدى الطرق التي سيتم توضيحها لاحقا للوصول الى الحل الامثل

صيغ البرمجة الخطية :-

The general linear programing (L.P) problem.

١) الصيغة العامة للبرمجة الخطية ------------------- General form

يمكن وضع الصيغة العامة للبرمجة الخطية بالشكل المختصر التالي

$$\max or \min \;\; Z = \sum_{j=1}^{n} cjxj$$

sub. to

$$\sum_{j=1}^{n} \text{aij xj} \; (\leq \; , \; = \; , \geq) \; bi \;\; (i = 1,2, \dots , m, j = 1,2, \dots \dots n \,)$$

$X_j \geq 0$

٢) الصيغة القانونية ------------------------------ Canonical form

يمكن وضع الصيغة العامة للبرمجة الخطية بشل قانوني وكما يلي :-

$$\max \;\; Z = \sum_{j=1}^{n} cjxj$$

s.t

$\sum_{j=1}^{n} \text{aij xj} \;\; \leq \;\; bj$

$X_j \; \geq 0$.

الامثلة :

٣) الصيغة القياسية -------------------------------------- Standard form

تعتبر هذه الصيغة أفضل من الصيغ السابقة (القانونية) لأنها تستخدم في تحليل البرامج الخطية (أي طريقة السمبلكس Simplex method)

فاذا كان لدينا الصيغة التالية يمكن أن تحول الى الصيغة القياسية وكما يلي :-

$$\max \; Z = \sum_{j=1}^{n} cjxj$$

s.t

$$\sum_{j=1}^{n} \text{aij xj} \;\; \leq \;\; bj$$

$X_j \geq 0$

$$\Downarrow$$

$$\min \mathit{or} \max \; Z = \sum_{j=1}^{n} cjxj$$

s.t

$$\sum_{j=1}^{n} \text{aij xj} + \text{Si} = \; bj$$

$Xj \geq 0 \qquad i = 1,2, \dots, m$

$Si \geq 0$

مثال :- حول مشكلة البرمجة الخطية التالية الى الصيغة القانونية .

$\min \quad Z = 3X_1 - 3X_2 + 7X_3$

S.to :-

$X_1 + X_2 + 3X_3 \leq 40$

$X_1 + 9X_2 - 7X_3 \geq 40$

$5X_1 + 3X_2 = 40$

$|5X_2 + 8X_3| \leq 100$

$X_1 , X_2 \geq 0 \quad X3 \ unrestricted \ in \ sign$

Solution :-

$\max \quad Z = (-3X_1) + 3X_2 - 7 (X_3' + X_3'')$

S.to

$X_1 + X_2 + 3 (X_3' + X_3'') \leq 40$

$-X_1 - 9X_2 + 3 (X_3' + X_3'') \leq -50$

$5X_1 + 3X_2 \leq 20$

$-5X_1 - 3X_2 \leq -20$

$5X_2 + 8 (X_3' - X_3'') \leq 100$

$-5X_1 - 8 (X_3' - X_3'') \leq -100$

$X_1 , X_2 \geq 0 \quad X_3' ، X_3' \geq 0$

مثال :- حول الأنموذج الخطي التالي الى :-

١) الصيغة القانونية

٢) الصيغة القياسية

$$\max \quad Z = 2X_1 - 4X_2$$

S.to :-

$$3X_1 + 5X_2 \geq 15$$

$$4X_1 + 9X_2 \leq 36$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحل :

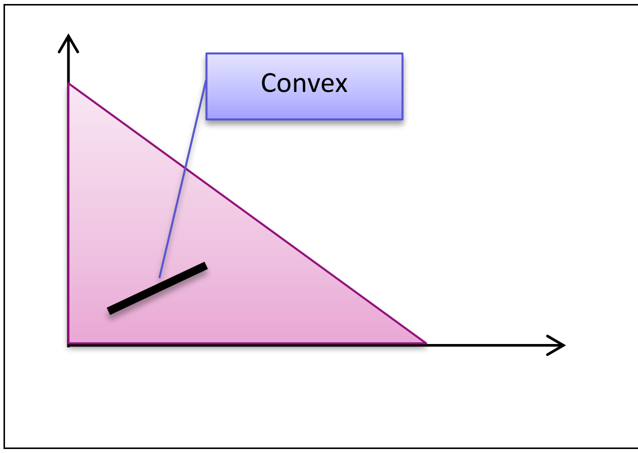
٢) الصيغة القياسية	١) الصيغة القانونية
$\max \quad Z = 2X_1 - 4X_2$ S.to :- $3X_1 + 5X_2 - S_1 = 15$ $4X_1 + 9X_2 + S_2 = 36$ $X_1 , X_2 , S1 , S2 \geq 0$	$\max \quad Z = 2X_1 - 4X_2$ S.to :- $-3X_1 - 5X_2 \leq -15$ $4X_1 + 9X_2 \leq 36$ $X_1 , X_2 \geq 0$

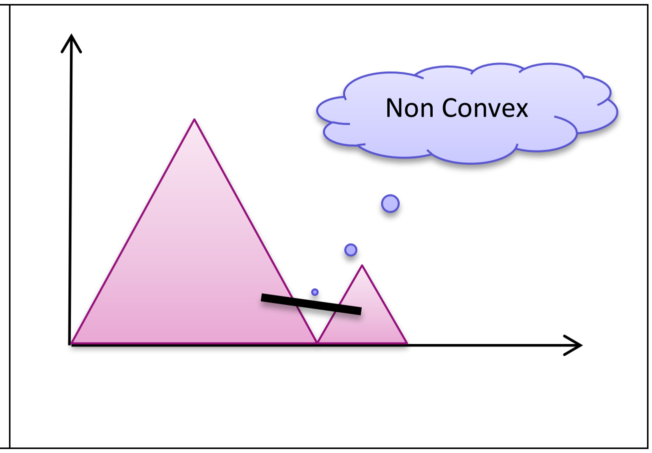
حل تمارين اضافية

تعتبر المجموعة محدبة بحيث أن المجموعة ذات البعد

محدبة Convex إذا تحقق الشرط :-

أنه عندما ينتمي شعاعين الى المجموعة فأن المستقيم الواصل بين الشعاعين ينتمي الى المجموعة ايضاً .





طرق حل نماذج البرمجة الخطية

الطريقة البيانية ------------------------------------ Graphical method

يمكن استخدام هذه الطريقة عندما يحتوي الأنموذج الخطي على متغيري قرار فقط مثل (X_1 , X_2)

EX :-

max $Z = ٨X_1 + ٦X_2$

S.to :-

$٤X_1 + ٢X_2 \leq 60$

$2X_1 + ٤X_2 \leq 48$

$X_1 , X_2 \geq 0$

نلاحظ أن الأنموذج يحتوي على متغيري قرار (X_1 , X_2) لذلك يمكن استخدام طريقة الرسم.

- نقوم برسم القيود بعد تحويلها الى معادلات :-

١)

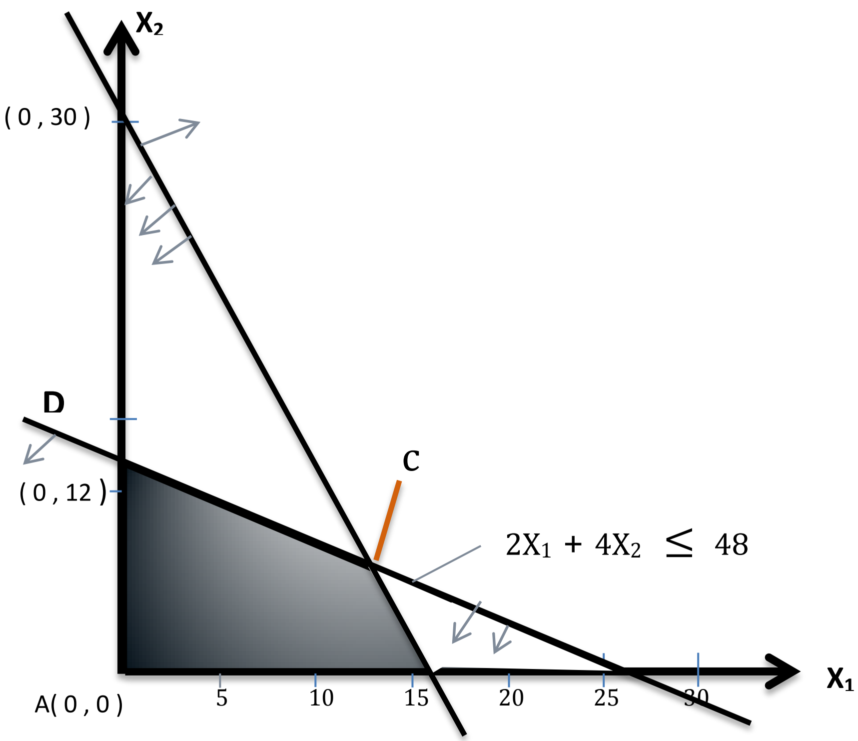
٤X_1 + ٢X_2 $\leq$ 60 When $X_1 = 0$ ➡ $X_2 = 30$ (0 , 30)

٤X_1 + ٢X_2 $=$ 60 When $X_2 = 0$ ➡ $X_1 = 30$ (15 , 0)

2)

$2X_1 + 4X_2 \leq 48$ When $X_1 = 0$ ➡ $X_2 = 12$ (0 , 12)

$2X_1 + 4X_2 = 48$ When $X_2 = 0$ ➡ $X_1 = 24$ (24 , 0)



تحديد منطقة الحل التي تشترك فيها القيود نحدد النقاط المتطرفة ونعوضها دالة الهدف .

ونلاحظ ان النقطة غير معلومة الإحداثيين (X1 , X2) .

لذلك نقوم باستخراجها اما من خلال البياني إن وجد أو باستخدام طريقة الحذف للمعادلات التي تمر بالنقطة C .

$X_1 + 2X_2 = 60$ $\quad 4X_1 + 2X_2 = 60$

$X_1 + 4X_2 = 48$ $\quad \mp 4X_1 \mp 8X_2 = \mp 96$

$-6X_2 = -36$ ➡ X2=6

➡ X1=12

C (12 ,6)

النقط	$Z = 8X_1 + 6X_2$		
(0,0)	$Z = 8(0)+ 6(0) = 0$		$\therefore$ optimal solution
(15,0)	$Z = 8(15)+ 6(0) = 12$		$X_1=12$, $X_2=6$
(12,6)	$Z = 8(12)+ 6(6) = \underline{\underline{132}}$	max	$Z=132$
(0,12)	$Z = 8(0)+ 6(12) = 72$		

طريقة السمبلكس --------------------------- Simplex Method

تعتبر طريقة السمبلكس(simplex) طريقة رياضية ذات كفاءة عالية في ايجاد الحلول المثلى لمسائل البرمجة الخطية. طورت هذه الطريقة من قبل العالم الرياضي الأمريكي (جورج دانتبرج) عام ١٩٤٧ وتستنبط هذه الطريقة في مبدأها على الابتداء بحل معين كل ما يعرف عنه بأنه مقبول ثم نستمر في تطوير هذا الحل الى أن يتم الحصول بعد عدة خطوات على الحل الأمثل (optimal solution)

في هذه الطريقة يتم تحويل الأنموذج الخطي الى الصيغة القياسية ثم بعد ذلك يتم انشاء جدول الحل الابتدائي المقبول ويتم تطويره.

وسيتم في المحاضرة القادمة شرح طريقة السمبلكس بالتفصيل